

## Logiques complexes

*Marc Halévy  
Février 2008*

### Valeur logique d'une proposition

Dans la logique classique, il n'y a que deux valeurs possibles pour toute proposition : "vrai=non-faux" et "faux = non-vrai".

En logique ouverte, il faut considérer au moins quatre valeurs possibles : "vrai", "non-faux", "faux" et "non-vrai".

Ainsi, l'identique de "vrai" (tout y est vrai et rien n'y est faux) est "vrai" et son complémentaire est "non-faux" (rien n'y est faux mais tout n'y est pas vrai : il y a du vrai), alors que son contraire est "non-vrai" (rien n'y est vrai mais tout n'y est pas faux : il y a du faux) et que son inverse est "faux" (tout y est faux et rien n'y est vrai).

Symétriquement, l'identique de "faux" (tout y est faux et rien n'y est vrai) est "faux" et son complémentaire est "non-vrai" (rien n'y est vrai mais tout n'y est pas faux), alors que son contraire est "non-faux" (rien n'y est faux mais tout n'y est pas vrai) et que son inverse est "vrai" (tout y est vrai et rien n'y est faux).

Posons quatre opérateurs, respectivement, d'équivalence E (identique), de complémentarité C (complémentaire), d'inversion I (inverse) et de négation N (contraire).

En appliquant ces quatre opérateurs structurels à la proposition basale "vrai", il vient quatre valeurs logiques : Ev (vrai), Cv (non-faux), Nv (non-vrai) et Iv (faux).

### Logique ouverte à quatre opérateurs structurels

En logique ouverte, si l'inverse et le contraire ne sont pas équivalents, l'identique et le complémentaire ne le sont pas non plus.

Soit p une proposition élémentaire. Appliquons-lui les quatre opérateurs, respectivement, d'équivalence E (identique), de complémentarité C (complémentaire), d'inversion I (inverse) et de négation N (contraire).

On peut écrire les équations basales suivantes :

- $E_p = p$
- $IE_p = I_p$
- $CE_p = C_p$
- $NE_p = N_p$
- $E_p = I^{2n}p$  (pour tout n entier)
- $I_p = I^{2n+1}p$  (pour tout n entier)
- $N_p = CI_p$  (le complémentaire de l'inverse est la négation)
- $C_p = NI_p$  (la négation de l'inverse est le complémentaire)

On peut aussi écrire les inéquations basales suivantes qui désignent des propositions indécidables :

- $I_p \neq NC_p$  (la négation du complémentaire)
- $E_p \neq IC_p$  (l'inverse du complémentaire)

- $N^{2n}p \neq Ep$  (la double négation)

On peut alors commencer à appliquer à cette logique ouverte à quatre opérateurs structurels (E,C,I et N), les deux grands opérateurs processuels de la logique formelle ET et OU, et tenter de remplir les tableaux de valeurs logiques du genre : .

<b>ET</b>	Ep	Cp	Np	Ip
Eq	?	?	?	?
Cq	?	?	?	?
Nq	?	?	?	?
Iq	?	?	?	?

Mais la question qui vient immédiatement, est celle de la valeur logique à prendre puisqu'il n'y en a pas deux ("vrai" et "faux") mais quatre (vrai, non-vrai, faux et non-faux).

Chaque case de notre tableau de valeur reproduit la totalité du tableau de valeur en ET des quatre valeurs élémentaires (vrai, non-vrai, faux et non-faux) entre elles :

<b>ET</b>	Ev Vrai	Cv Non-faux	Nv Non-vrai	Iv Faux
Ev Vrai	Ev	Cv	Nv	Iv
Cv Non-faux	Cv	Cv (???)	Nv (???)	Iv
Nv Non-vrai	Nv	Nv (???)	Nv (???)	Iv
Iv Faux	Iv	Iv	Iv	Iv

Pour valider ce tableau, il suffit de remplacer "non-vrai" et "non-faux" respectivement par "rien n'est vrai mais tout n'est pas faux" et par "rien n'est faux mais tout n'est pas vrai". On voit apparaître des positions indécidables symbolisée par "???". On remarquera par ailleurs - mais ce ne sera pas développé ici - que l'on peut réduire la logique quaternaire en une logique ternaire en identifiant "non-vrai" (au sens de "partiellement faux") et "non-faux" (au sens de "partiellement vrai"); cette logique ouverte simplifiée perd en rigueur et en symétrie, mais elle est plus "confortable" à manipuler en pratique.

On peut aussi obtenir le tableau équivalent pour l'opérateur logique OU :

<b>OU</b>	Ev Vrai	Cv Non-faux	Nv Non-vrai	Iv Faux
Ev Vrai	Ev	Ev	Ev	Ev
Cv Non-faux	Ev	Cv (???)	Cv (???)	Cv
Nv Non-vrai	Ev	Cv (???)	Nv (???)	Nv
Iv Faux	Ev	Cv	Nv	Iv

### **Logique ouverte à multiples contradictions**

On peut encore complexifier l'approche et développer une tout autre approche de logiques ouverte. Considérons une proposition simple (ex.: "le ciel est bleu") et appliquons le processus de négation sur chaque élément de la phrase (dans notre exemple, il y a trois éléments : "ciel", "être" et "bleu").

En n'appliquant la négation que sur un seul des trois éléments de la phrase, il vient trois propositions de premier niveau :

- le ciel est non-bleu
- le ciel n'est pas bleu
- le non-ciel est bleu

Par négation de deux éléments, il vient encore propositions de deuxième niveau :

- le ciel n'est pas non bleu
- le non-ciel n'est pas bleu
- le non-ciel est non-bleu

Par négation des trois éléments, il vient une seule proposition de troisième niveau :

- le non-ciel n'est pas non-bleu

D'une proposition à trois éléments sort, donc, huit ( $2^3$ ) propositions dérivées.

Chacune de ces huit propositions peut être affublée de chacune des quatre valeurs logiques (vrai, non-vrai, faux et non-faux).

Cela aboutit à  $4 \times 8 = 32$  possibilités logiques pour une petite phrase aussi simple que "le ciel est bleu".

Il est clair que si l'on construit une proposition initiale de 6 éléments (ex.: "le ciel est bleu à midi dans le Morvan à mes yeux" : ciel/être/bleu/midi/Morvan/mes yeux), on débouchera sur  $2^6 = 64$  propositions logiques dont chacune pourra avoir l'une des quatre valeurs de vérité ce qui fournit 256 possibilités logiques de vérités.

Etc ...

### **Logique fractale**

Au vu de ce qui précède, il est aisé de généraliser et de passer des logiques ouvertes aux logiques fractales.

Même en ne considérant que les quatre valeurs de vérité décrites au premier paragraphe (on pourrait "corser" la chose en généralisant à des systèmes à n valeurs de vérité), s'installe un processus gigogne à au moins deux dimensions :

- d'une part, en composant des propositions de 1, puis 2, puis 3, puis 4, etc ..., puis N éléments syntaxiques ;

- d'autre part, en combinant ces propositions au moyen du ET et du OU (ou tous autres opérateurs logiques que l'on veut inventer) pour former des discours de 1, puis 2, puis 3, puis 4, etc ..., puis N propositions logiques.

Il devient vite évident que de telles logiques fractales développent, à vitesse exponentielle, une indécidabilité (donc une indétermination logique) qui donne clairement raison aux sophistes contre Socrate, Platon et Aristote.

\*

\* \*